Lehký úvod do výrokové logiky
(nejen pro ty, kteří se připravují na TSP MU) – část první

Subtest analytické myšlení v testech studijních předpokladů MU bývá často postrachem uchazečů – zejména pak úlohy, jejichž řešení je založeno na použití aparátu výrokové logiky. Cílem tohoto textu je v kompaktní a přístupné podobě shrnout požadované znalosti z výrokové logiky a demonstrovat jejich využití při řešení konkrétních úloh. (Jedná se v podstatě o příručku, která poslouží jako doplňkový materiál těm, kteří sledují emailový korespondenční seminář www.prijimacky-tsp.cz/reseni-tsp.cz.)

Pro studenty středních škol bývá při samostudiu často obtížné zvolit vhodné pořadí témat z výrokové logiky. Tento text může být rovněž chápán a použit jako vodítko při úvahách o koncipování přípravy na tuto část analytického myšlení v TSP MU.

Hlavní ideje výrokové logiky, pojem výroku

Odpovědět korektně a úplně na otázku *„Co je (to) logika?“* je (překvapivě) poměrně obtížné. Jde při tom o otázku filozofickou, která tvoří základ disciplíny zvané *filozofie logiky*. Z hlediska našich cílů však úplně postačí, když logiku vymezíme jako disciplínu, která studuje pojmy jako pravdivost, vyplývání a odvozování. Vzhledem k tomu, že v tomto textu se budeme zabývat výrokovou logikou, můžeme upřesnit, že výroková logika je disciplína, která dokáže pomoci při řešení otázek typu typu: *Lze (případně jak) určit pravdivostní hodnotu nějakého výroku, známe-li pravdivostní hodnoty výroků jiných? Vyplývá daný výrok z množiny jiných výroků? Který z uvedených výroků je ekvivalentní výroku danému?* a mnoha dalších.

Klasická výroková logika, tedy výroková logika, jíž se budeme zabývat v tomto textu, je založena především na těchto dvou základech:

- Výroky mohou nabývat pouze dvou pravdivostních hodnot.
- Pravdivostní hodnotu daného složeného výroku lze zjistit na základě pravdivostních hodnot jednodušších výroků, ze kterých je daný výrok sestaven.

Abychom plně porozuměli těmto myšlenkám, pokusme se uvést definice několika pojmů, se kterými se zde setkáváme.

Výrok

Výrokem rozumíme oznamovací větu, u které má smysl uvažovat o pravdivostní hodnotě.

Jako příklady výroků můžeme uvést třeba věty: *Masarykova univerzita byla založena roku 1919. Dnes je pondělí. Jestliže je neděle, pak nejsem v práci.*

Mezi výroky tedy nepatří otázky (*Co je dnes za den?*) či přací věty (*Kéž by už byl pátek!*), ale ani některé oznamovací věty, u kterých nelze smysluplně uvažovat o pravdivosti či nepravdivosti – příkladem mohou být tzv. řečové akty (*Prohlašuji dnešní zasedání za zahájené. Pasuji tě do do rytířského stavu.*).

Jak jsme již naznačili, budeme pracovat s logikou, která používá dvě pravdivostní hodnoty – pravda a nepravda, které budeme často označovat symboly 1 (pravda) a 0 (nepravda). Místo *Výrok A je pravdivý.* budeme často používat vyjádření *Pravdivostní hodnota* *výroku A je 1.*

Logické spojky

Logické spojky jsou některé spojky používané v přirozeném jazyce, které vyjadřují logické vztahy. Umožňují nám z jednodušších výroků sestavovat výroky složitější. My se v tomto textu setkáme se čtyřmi, resp. pěti logickými spojkami, jejichž výčet a charakteristika následuje. Na rozdíl od přirozeného jazyka je však ve výrokové logice přesně popsáno, jaký mají význam – přesněji řečeno – jakým způsobem je dána pravdivostní hodnota výroku, který ji obsahuje.

Zde je seznam logických spojek, jimiž se budeme zabývat:

- **konjunkce** – odpovídá spojce **a,**
- **disjunkce** – odpovídá spojce **nebo (v nevylučovacím slova smyslu),**
- **implikace** – odpovídá konstrukci **jestliže…, pak …,**
- **ekvivalence** – odpovídá konstrukci **…právě tehdy, když….**

Je vidět, že všechny tyto spojky spojují vždy dva výroky. Máme-li dva výroky, např. *Dnes je sobota.* a *Nejdu do školy.*, získáme použitím např. konjunkce výrok *Dnes je sobota a nejdu do školy.,* použitím implikace pak výrok *Jestliže je dnes sobota, pak nejdu do školy.*

Dále se ve výrokové logice setkáváme s důležitou spojkou, která váže pouze jeden výrok (je trochu zvláštní nazývat ji spojkou, nicméně ze systematického hlediska je to více než praktické). Tou spojkou je

- **negace** – odpovídá konstrukci **není pravda, že…** či předponě **ne-** u slovesa.

Aplikujeme-li negaci na výrok *Venku prší*, získáme výrok *Není pravda, že venku prší.,* resp. zkrácený výrok *Venku neprší.*

Slovní vyjádření logických spojek se se mohou odlišovat od těch, které jsme uvedli výše, např. místo *a* je často v témže významu použito *i*, aniž by se jednalo o jinou spojku než konjunkci. Více se o tom dozvíme, až budeme chování spojek popisovat detailněji.

Výroky elementární a složené

Složené výroky jsou takové výroky, které vznikly z jednodušších výroků použitím libovolných logických spojek.

Elementární výroky jsou takové výroky, které neobsahují logické spojky.

Místo slovního spojení *elementární výroky* se někdy používá *jednoduché výroky* či *atomární výroky.*

Příklady elementárních výroků:

- Dnes je sobota.
- Lev je savec.
- Papoušek žije ve vodě.

Příklady složených výroků:

- Dnes není sobota. (obsahuje negaci)
- Lev je savec a zmije je plaz.
- Jestliže zvíře žije ve vodě, pak se jedná o rybu.

Cvičení

U následujících výroků určete, zda se jedná o výrok elementární nebo složený. V případě složených výroků určete, jaké (všechny) logické spojky obsahuje.

a) Praha je hlavní město ČR.

b) Jestliže venku prší, pak jsou ulice mokré.

c) Nosím čepici právě tehdy, když je zima.

d) Jestliže venku prší a mrzne, pak není na silnicích bezpečno.

e) Uchazeč umí anglicky a německy.

Řešení

a) výrok elementární, **b)** výrok složený (implikace), **c)** výrok složený (ekvivalence), **d)** výrok složený (implikace, konjunkce, negace), **e)** konjunkce

Pozn.: V případě **e)** by nás mohla napadnout námitka ve smyslu „konjunkce má spojovat výroky“, je tedy výraz ***německy*** výrokem?! Věta uvedená pod písmenem **e)** však má stejný význam jako věta *Uchazeč umí anglicky a uchazeč umí německy.*, ve které spojka *a* spojuje skutečně dva výroky. Podoba *Uchazeč umí anglicky a německy.* je pak v podstatě jakousi její zkratkou.

Pozn. 2.: Zde, stejně jako v mnoha dalších učebních textech jiných autorů, dochází k drobné terminologické nepřesnosti: výrazem konjunkce je někdy označována samotná spojka, jindy je tímto výrazem označován samotný složený výrok, který vznikl aplikací této spojky na dva výroky, podobně s disjunkcí, implikací atd. Přiznáváme se k této nepřesnosti, kdy plynule přecházíme od jednoho významu k druhému. Není to však vážný nedostatek, neboť vždy je z kontextu zřejmé, co pod daným výrazem máme na mysli.

Logické spojky a pravdivost složeného výroku

Pravdivost složeného výroku je dána pravdivostní hodnotou jeho částí (výroků) a logickými spojkami, které jsou v něm obsaženy.

Máme-li dvojici výroků, řekněme A a B, existují přesně čtyři případy v závislosti na jejich pravdivosti: mohou být:

- oba výroky pravdivé
- výrok A pravdivý, výrok B nepravdivý
- výrok A nepravdivý, výrok B pravdivý
- oba výroky nepravdivé.

(žádná další možnost neexistuje).

To je možné v přehledné podobě shrnout do tabulky:

	A	B
I.	1	1
II.	1	0
III.	0	1
IV.	0	0

Jak uvedenou tabulku číst? Např. řádek II. odpovídá situaci, v níž je první výrok (A)

pravdivý, druhý výrok (B) nepravdivý atp.

V případě, že bychom neměli jen dva, ale tři výroky, řekněme A, B a C, bylo by těchto případů v závislosti na jich pravdivostech přesně osm. Uveďme si pro přehlednost už jen tabulku.

	A	B	C
I.	1	1	1
II.	1	1	0
III.	1	0	1
IV.	1	0	0
V.	0	1	1
VI.	0	1	0
VII.	0	0	1
VIII.	0	0	0

Např. čtvrtý řádek v této tabulce odpovídá situaci, kdy první výrok (A) je pravdivý a ostatní dva (B, C) jsou nepravdivé.

Pokud bychom měli výroky čtyři, bylo by jednotlivých případů pravdivosti těchto čtyř výroků celkem 16. Úlohy, ve kterých bylo nutné použít tabulky se šestnácti řádky se však naštěstí v TSP MU nevyskytují.

Místo výrok *A je pravdivý* budeme někdy říkat, že výrok *A platí*, místo *výrok A je nepravdivý* řekneme, že *A neplatí*. Platnost a pravdivost budeme v tomto kontextu považovat za synonyma. Rovněž budeme místo spojení *výrok A platí* používat spojení *výrok A je splněný* atp.

Podívejme se teď nyní na jednotlivé výrokové spojky a popišme, jakou pravdivostní hodnotu má složený výrok, který vznikl aplikací dané spojky na dvojici (libovolných) výroků A a B **v závislosti na pravdivostních hodnotách těchto dvou výroků**.

Konjunkce

Konjunkce dvou výroků je pravdivá, jestliže jsou pravdivé oba dva výroky, z nichž se skládá. Ve všech ostatních případech je nepravdivá.

Konjunkce se zpravidla značí symbolem $\wedge$, někdy také &. Konjunkci dvou výroků A a B tedy zapisujeme symbolicky $A \wedge B$.

V tabulce tento fakt zachytíme následovně:

	A	B	$A \wedge B$
I.	1	1	1
II.	1	0	0
III.	0	1	0
IV.	0	0	0

Jak číst tuto tabulku? Např. řádek II. nám říká, že v situaci, kdy výrok A je pravdivý, výrok B je nepravdivý, má složený výrok $A \wedge B$ pravdivostní hodnotu 0.

Stojí za to upozornit, že nepředpokládáme, že A a B by musely nutně být elementární výroky – je docela dobře možné, že A a B jsou výroky složené a že mají nějakou další vnitřní strukturu.

Vidíme, že chování konjunkce odpovídá naší intuice o fungování spojky *a*. Věta *Uchazeč umí anglicky a umí německy.* je skutečně pravdivá jen v situaci, kdy umí oba tyto jazyky, jinými slovy, pokud výrok *Uchazeč umí anglicky.* je pravdivý a zároveň výrok *Uchazeč umí německy.* je pravdivý. Pokud by uměl pouze jeden z jazyků, nebo dokonce žádný, byla by konjunkce zjevně nepravdivá.

Konjunkce může být vyjádřena nejen spojkou *a*, ale i dalšími. Např. *i* či v záporném případě *ani–ani* (namísto *Uchazeč neumí anglicky a uchazeč neumí německy.* se napíše přirozeněji jen *Uchazeč neumí ani anglicky, ani německy.* – význam je samozřejmě stejný.)

Zatím jsme se na pravdivost konjunkce dívali „ve směru od jednodušších výroků ke složitějším". V řadě úloh TSP MU však je potřebný opačný přístup: máme složený výrok ve tvaru konjunkce a potřebujeme něco usoudit o jednodušších výrocích. To je popsáno v následujících dvou bodech:

- ✔ Je-li konjunkce dvou výroků pravdivá, pak obě její části musejí být pravdivé.
- ✔ Je-li konjunkce dvou výroků nepravdivá, pak alespoň jedna její část je ***ne***pravdivá (možná obě).

Tento typ úvah budeme při řešení mnoha úloh hojně používat.

Disjunkce

Disjunkce dvou výroků je pravdivá, jestliže je pravdivý alespoň jeden z výroků, z nichž se disjunkce skládá, jinak je nepravdivá.

Disjunkce se zpravidla značí symbolem v. Disjunkci dvou výroků A a B tedy zapisujeme symbolicky $A \vee B$.

V tabulce tento fakt zachytíme následovně:

	A	B	$A \vee B$
I.	1	1	1
II.	1	0	1
III.	0	1	1
IV.	0	0	0

Disjunkce tedy odpovídá **nevylučovací** spojce *nebo*. Tvrdíme-li, že *někdo umí anglicky nebo umí německy*, znamená to, že umí alespoň jeden z těchto jazyků. Říkáme-li, že *dnes je sobota nebo neděle*, říkáme tím podle výrokové logiky, že je alespoň jeden z těchto dvou dnů. To je možná poněkud zvláštní, ale je to tak. Problém je totiž v tom, že v češtině se používá *nebo* ve dvou významech, kdežto v logice je význam (logické) spojky *nebo* dán jednoznačně.

Podobně jako v případě konjunkce uveďme způsob uvažování pravdivostní hodnotě částí disjunkce, víme-li něco o disjunkci jako celku.

- ✔ Je-li disjunkce dvou výroků ***ne***pravdivá, pak obě její části musejí být ***ne***pravdivé.
- ✔ Je-li disjunkce dvou výroků pravdivá, pak alespoň jedna její část musí být pravdivá

(možná obě).

Implikace

Implikace dvou výroků je nepravdivá v jediném případě – v situaci, kdy její první člen je pravdivý a druhý nepravdivý. Ve všech zbylých případech je pravdivá.

Implikace se zpravidla značí symbolem →. Implikaci dvou výroků A a B tedy zapisujeme symbolicky $A \rightarrow B$. Výrok A se v tomto kontextu nazývá první člen, výrok B potom druhý člen, (resp. přední člen a zadní člen).

Jak to vypadá v tabulce?

	A	B	$A \rightarrow B$
I.	1	1	1
II.	1	0	0
III.	0	1	1
IV.	0	0	1

Implikace je bezesporu spojkou nejnáročnější na pochopení. Zatímco v případě konjunkce a disjunkce nezáleželo na pořadí členů (např. výrok $A \vee B$ se pravdivostí neliší v žádné situaci od výroku $B \vee A$), u implikace na pořadí záleží (což ostatně napovídá i terminologie „přední člen" a „zadní člen"). Smyslem implikace je vyjádřit jakýsi jednosměrný vztah: „říká, co se má stát, když je splněna podmínka (přední člen), ale neříká, co se má stát, pokud tato podmínka splněna není.".

Tvrdím-li, že J*estliže uděláte TSP na percentil 99, se dostanete na MU.*, neříkám, co se stane v situaci, kdy TSP uděláte třeba na percentil 80. Říkám tím jen, co se stane v případě, že TSP uděláte na percentil 99. Všimněte si (nad tím je opravdu dobré se důkladně zamyslet), že přesně to se odráží v tabulce. Pro ilustraci pro nás výrokem A bude výrok *Uděláte TSP na percentil 99.* a výrokem B výrok *Dostanete se na MU.*

$A \rightarrow B$ tedy zjevně odpovídá výroku *jestliže uděláte TSP na percentil 99, dostanete se na MU.* Pokud tato implikace platí (je pravdivá) a platí výrok A (je pravdivý), musí platit i výrok B (být pravdivý) – najdeme si řádky v naší tabulce, kdy implikace platí (I., III. a IV.) a z nich vybereme ty, ve kterých platí výrok A, a vidíme, že se jedná **jen a pouze o řádek I.**, kde výrok B má pravdivostní hodnotu 1, čili je pravdivý. Čili když platí J*estliže uděláte TSP na percentil 99, dostanete se na MU.* a také výrok *Uděláte TSP na percentil 99.*, pak výrok *Dostanete se na MU.* musí také platit. Stručně řečeno, pravdivost výroku $A \rightarrow B$ a pravdivost výroku A mi zaručí pravdivost B. To není nic překvapivého.

Zajímavější situace je v momentě, kdy platí výrok *Jestliže uděláte TSP na percentil 99, dostanete se na MU.* a výrok *Uděláte TSP na percentil 99.* **neplatí.** Platnost implikace mi říká, že se v tabulce pohybujeme na I. nebo III. nebo IV. řádku. Neplatnost výroku A znamená, že současně při tom musíme být na III. nebo IV. řádku. Dáme-li tyto poznatky dohromady, znamená to, že jsme buď na III., nebo na IV. řádku. V těchto dvou řádcích ale výrok B nabývá různých pravdivostních hodnot (jednou je pravdivý, podruhé je nepravdivý). To znamená, že z pravdivosti $A \rightarrow B$ a nepravdivosti A nejsme schopni nic říci o pravdivosti B.

Výrok *Jestliže uděláte TSP na percentil 99, dostanete se na MU.* zcela jistě platí. (Kdyby nám chtěl někdo oponovat, musel by ukázat, že ani percentil 99 na některý obor nestačil, čili musel by ukázat, že v nějaké situaci může první člen platit a zároveň druhý neplatit).

Ale zároveň také víme, že k tomu, abyste se dostali na MU, určitě není třeba mít takto špičkový výsledek. (Pozn. autora: na MU je řada oborů, které jsou kvalitní a kam Vám bude stačit percentil třeba kolem 50.) Je vidět, že podmínka „mít percentil 99“ je postačující, ale nikoliv nutná k tomu, abyste se dostali na MU.

Platí-li implikace $A \rightarrow B$, znamená to jen, že nenastane situace, že by výrok A platil, ale B nikoliv. To přesně odpovídá II. řádku tabulky. V našem konkrétním případě to znamená, že se **nestane,** že bych *udělal TSP na percentil 99,* ale *nestudoval na MU.*

To shrneme do podoby následující poučky:

✔ Je-li implikace dvou výroků ***ne***pravdivá, pak její první člen je pravdivý a druhý nepravdivý.

Implikace A → B může být vyjádřena mnoha různými způsoby, všechny ale říkají z logického pohledu totéž:

- Jestliže A, pak B.
- Když A, tak B.
- Pokud A, tak B.

Další vyjádření uvidíme v konkrétních úlohách.

Ekvivalence

Ekvivalence dvou výroků je pravdivá, jestliže oba z výroků, z nichž se ekvivalence skládá, mají stejnou pravdivostní hodnotu, jinak je nepravdivá.

Ekvivalence se zpravidla značí symbolem ↔. Ekvivalenci dvou výroků A a B tedy zapisujeme symbolicky $A \leftrightarrow B$.

V tabulce tento fakt zachytíme následovně:

	A	B	$A \leftrightarrow B$
I.	1	1	1
II.	1	0	0
III.	0	1	0
IV.	0	0	1

Ekvivalence se obvykle slovně vyjadřuje spojením ***…právě tehdy, když…***, případně …tehdy a jen tehdy, když…

✔ Je-li ekvivalence dvou výroků pravdivá, znamená to, že oba její členy jsou pravdivé, anebo oba nepravdivé, tj. mají stejnou pravdivostní hodnotu.

✔ Je-li ekvivalence dvou výroků ***ne***pravdivá, pak její členy nabývají různých pravdivostních hodnot

Negace

Zatímco všechny doposud zmíněné výrokové spojky spojovaly vždy dva výroky, negace je spojkou, která „spojuje“ výrok jeden.

Negace výroku má vždy opačnou pravdivostní hodnotu než původní výrok.

Negace se zpravidla značí symbolem ¬. Negaci dvou výroků A značíme $\neg A$.

V tabulce tento fakt zachytíme následovně:

	A	$\neg A$
I.	1	0
II.	0	1

Negace výroku se zpravidla vyjadřuje spojením ***„není pravda, že...“***, případně předponou ***ne-*** u slovesa.

Okamžitě též vidíme, že dvojitá negace nějakého výroku říká totéž, co původní výrok.

Shrnutí

Význam logických spojek je přesně definován. Pravdivostní hodnotu výroku, který obsahuje logické spojky zjistíme na základě pravdivostních hodnot výroků, z nichž se složený výrok skládá a z pravidel, které máme pro jednotlivé výrokové spojky.

V následujícím příkladu si shrneme, jaký význam mají jednotlivé spojky. Budeme pracovat se dvěma výroky, A: Adam přijede, B: Blanka přijede.

- Adam přijede a Blanka přijede ($A \wedge B$): tvrdíme-li tento výrok, říkáme, že přijedou oba.
- Adam přijede nebo Blanka přijede ($A \vee B$): tvrdíme-li tento výrok, říkáme, že přijede alespoň jeden z nich (možná dokonce oba).
- Jestliže přijede Adam, pak přijede Blanka ($A \rightarrow B$): tvrdíme-li tento výrok, říkáme, že může nastat kterákoliv situace kromě té, v níž by Adam přijel, ale Blanka ne.
- Jestliže přijede Blanka, pak přijede Adam. ($B \rightarrow A$): tvrdíme-li tento výrok, říkáme, že může nastat libovolná situace kromě té, v níž by Blanka přijela, ale Adam ne.
- Adam přijede právě tehdy, když přijede Blanka ($A \leftrightarrow B$): tvrdíme-li tento výrok, říkáme, že přijedou buď oba, anebo ani jeden z nich.

Určování pravdivostní hodnoty složeného výroku

Určit pravdivostní hodnotu složeného výroku v situaci, kdy známe pravdivostní hodnoty výroků elementárních, z nichž je složen, je hlavní myšlenkou řady úloh, které se v TSP MU vyskytují.

Mějme např. výrok $B \vee \neg A$ (Pro ilustraci: Blanka přijde nebo Adam nepřijde – pokud A a B značí výroky jako v předchozí části.) Jakou má pravdivostní hodnotu? Tato otázka je špatně položená. Pravdivost tohoto výroku je totiž závislá na tom, jakou pravdivost mají jednotlivé elementární výroky, které se v tomto složeném výroku vyskytují, tj. výroky A a B.

Jak to bude vypadat např. v situaci, kdy jak výrok A, tak výrok B budou oba pravdivé? V této situaci bude výrok $\neg A$ nepravdivý (protože negace „převrací“ pravdivostní hodnoty), B je pravdivé (to předpokládáme) a tak disjunkce $B \vee \neg A$ je disjunkcí, ve které je první člen pravdivý a druhý nepravdivý. Z pravidel o pravdivostní hodnotě disjunkce víme, že v takovémto případě je disjunkce pravdivá. Čili výsledek je *pravda*.

Cvičení

Jakou pravdivostní hodnotu má tento výrok v situaci, kdy výrok B je nepravdivý a výrok A pravdivý?

(Odpověď: nepravda – pokuste se to sami zdůvodnit jako v předchozím případě).

Tabulky pravdivostních hodnot

Řekne-li se výroková logika, představí si řada lidí právě vyplňování tabulek pravdivostních hodnot. Ano, tabulky pravdivostních hodnot do výrokové logiky samozřejmě patří, ale bylo by nesprávné zaměňovat řešení úloh z výrokové logiky s bezduchým vyplňováním tabulek.

Na tabulky pravdivostních hodnot budeme nahlížet spíše jako na organizované zaznamenávání úvah, které jsme vedli v předchozím příkladě.

Zabývejme se stále výrokem $B \vee \neg A$. Ukázali jsme si, jakou má pravdivostní hodnotu v situaci, kdy jsou oba výroky A a B pravdivé, následně jako cvičení byla úloha určit pravdivostní hodnotu v situaci, kdy A je pravdivý a B nepravdivý výrok.

Zkusme si nyní zapsat naše snažení do tabulky:

	A	B	$\neg A$	$B \vee \neg A$
I.	1	1	0	1
II.	1	0	0	0
III.	0	1	1	1
IV.	0	0	1	1

Čili nejprve jsme si vlastně vyplnili I. řádek tabulky, následující cvičení bylo vlastně vyplněním řádku II.

Jakým způsobem interpretovat např. žlutě podbarvené číslo? Žlutě podbarvená jednička říká, že výrok $B \vee \neg A$ je pravdivý v situaci, kdy výrok A je nepravdivý a výrok B pravdivý. Podobným způsobem bychom mohli interpretovat kterékoliv číslo z tabulky ve sloupci se složeným výrokem v záhlaví. Jak vidíme, tabulka pravdivostních hodnot tedy obsahuje pravdivostní hodnotu daného výroku, který nás zajímá, ve všech možných situacích daných všemi různými kombinacemi pravdivostních hodnot elementárních výroků, které se v něm vyskytují.

Cvičení

Pokuste se zkonstruovat tabulku pravdivostních hodnot pro výrok $\neg A \rightarrow B$.

Pokud jste dospěli k takovémuto řešení, pak je vše v pořádku.

	A	B	$\neg A$	$\neg A \rightarrow B$
I.	1	1	0	1
II.	1	0	0	1
III.	0	1	1	1
IV.	0	0	1	0

(Drobné upozornění, poslední sloupeček je implikace, jejíž první člen je ve sloupečku $\neg A$ a druhý člen ve sloupečku B, sloupečky jsou tedy *v opačném* pořadí, než jsou v implikaci.)

Podobným způsobem bychom mohli zkonstruovat tabulku pro libovolný výrok. Začínáme s elementárními výroky a následně z nich sestavujeme složitější a složitější, než se dostaneme k výroku, o který nám jde.

Pokud bychom chtěli vytvořit tabulku pravdivostních hodnot pro výrok $(\neg A \wedge C) \rightarrow \neg B$, postupovali bychom takto: vidíme, že daný výrok obsahuje tři elementární výroky A, B, C. Z výroku

A jsme použitím negace udělali výrok $\neg A$, z výroku B jsme pomocí negace udělali výrok $\neg B$, z výroků $\neg A$ a C jsme pomocí konjunkce získali výrok $\neg A \wedge C$. Z toto výroku a výroku $\neg B$ pak použitím implikace získáme výsledný výrok. Přesně to se odrazí v záhlaví jednotlivých sloupců tabulky pravdivostních hodnot, která bude mít tentokráte 8 řádků, neboť pracujeme se třemi elementárními výroky.

	A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge C$	$(\neg A \wedge C) \rightarrow \neg B$
I.	1	1	1	0	0	0	1
II.	1	1	0	0	0	0	1
III.	1	0	1	0	1	0	1
IV.	1	0	0	0	1	0	1
V.	0	1	1	1	0	1	0
VI.	0	1	0	1	0	0	1
VII.	0	0	1	1	1	1	1
VIII.	0	0	0	1	1	0	1

Ekvivalentní výroky

Poměrně častou úlohou v TSP MU je určit, který z výroků je ekvivalentní výroku danému. Jedná se o úlohy, které se možná na první pohled zdají neintuitivní a náročné, nicméně při pochopení principu zjistíte, že jde o úlohy poměrně jednoduché a při osvojení si některých jednoduchých pravidel jde o úlohy relativně rychle řešitelné.

Začněme proto definicí.

Definice: Výroky α a β jsou ekvivalentní, právě když **mají shodné sloupečky v tabulce pravdivostních hodnot.**

Jinými slovy, neexistuje situace, ve které by tyto dva výroky nabývaly odlišných pravdivostních hodnot, tj. nenajdeme řádek tabulky, ve kterém by jeden z těchto výroků měl jedničku a druhý nulu.

Ukažme si to na příkladu.

Př.: Které z následujících výroků jsou ekvivalentní a které nikoliv?

(i) $A \rightarrow B$

(ii) $B \rightarrow A$

(iii) $\neg B \rightarrow \neg A$

(iv) $\neg A \vee B$

Řešení: definice nám napovídá, jak lze při řešení postupovat. Ke každému z výroků si uděláme příslušný sloupeček v tabulce pravdivostních hodnot a poté zjišťujeme, které sloupečky jsou shodné a které nikoliv.

	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$
I.	1	1	0	0	1	1	1	1
II.	1	0	0	1	0	1	0	0

III.	0	1	1	0	1	0	1	1
IV.	0	0	1	1	1	1	1	1

Po zkonstruování tabulky okamžitě vidíme, že výroky (i), (iii) a (iv) jsou všechny navzájem ekvivalentní, výrok (ii) není ekvivalentní se žádným z těchto výroků.

Vidíme tedy, že i když výroky „vypadají jinak“, mohou mít v někdy stejné sloupečky v tabulce pravdivostních hodnot.

Na ekvivalentní výroky rychleji

Metoda určování ekvivalentních výroků pomocí tabulky je poměrně jednoduchá a její použití vede vždy k výsledku. Někdy však může být řešení touto cestou zdlouhavé. V některých případech lze použít následujících pravidel.

Máme-li implikaci, získáme k ní ekvivalentní výroky například tak, že:

- přední a zadní člen prohodíme a při tom „onegujeme“ (čili např. z $A \to B$ vznikne $\neg B \to \neg A$)
- přední člen „onegujeme“ a zadní člen necháme a tyto členy spojíme disjunkcí (čili např. z $A \to$ B vznikne $\neg A \vee B$)

Máme-li disjunkci, získáme k ní ekvivalentní výroky například tak, že:

- první člen „onegujeme“ a zadní člen ponecháme a tyto dva členy spojíme spojkou implikace (čili např. z $A \vee B$ vznikne $\neg A \to B$)

Pokud při aplikaci tohoto postupu někde vznikne „dvojitá negace“, můžeme tyto dvě negace odstranit.

Př.: Pomocí výše uvedeného postupu vytvořte několik ekvivalentních výroků k $\neg A \to \neg B$.

Řešení: Máme před sebou výrok ve tvaru implikace, budeme tedy aplikovat první dva body těchto pravidel:

- první a druhý člen prohodíme a „onegujeme“, čímž dostáváme $\neg\neg B \to \neg\neg A$. Dvojité negace můžeme odstranit, čili dostali jsme se k výroku $B \to A$.
- první člen „onegujeme“ a zadní člen necháme a tyto členy spojíme disjunkcí, čímž dostáváme $\neg\neg A \vee \neg B$, opět odstraníme dvojitou negaci a dostaneme $A \vee \neg B$.

Závěr: k výroku $\neg A \to \neg B$ jsme našli dva ekvivalentní výroky, $B \to A$ a $A \vee \neg B$. (Pro kontrolu můžete vytvořit tabulky pravdivostních hodnot těchto výroků a následně porovnat jejich sloupečky).

Tato pravidla nám říkají něco málo o tom, jak lze vytvářet ekvivalentní výroky k těm, které obsahují disjunkci nebo implikaci (a negace), o ostatních spojkách neříkají nic. Při analýze obsahu TSP je však zřejmé, že úlohy na nacházení ekvivalentních výroků se zabývají především těmito dvěma spojkami.

Při řešení se rovněž uplatní následující pozorování:

Jsou-li výroky P a Q ekvivalentní a dále, jsou-li výroky K a L ekvivalentní, ale zároveň P a K ekvivalentní nejsou, pak ani Q a L nemohou být ekvivalentní.

Zdá se Vám toto pozorování komplikované? Ve skutečnosti tvrdí celkem prostou věc: pokud P a Q říkají totéž, a K a L říkají totéž, a přitom P a K říkají něco jiného, pak Q a L neříkají to stejné.

(Určitou paralelu můžeme najít u čísel: pokud by platilo, že $p = q$ a zároveň $k = l$, ale p se nerovná k, pak by se ani q nerovnalo l.)

Konec prvního dílu. Veškeré podněty a připomínky směřujte např. na seminare@kurzy-fido.cz