

# Řešení úloh z TSP MU – SADY S<sub>1</sub>

projekt RESENI-TSP.CZ

- úlohy jsou vybírány z dříve použitých TSP MU
- autoři řešení jsou zkušení lektori vzdělávací agentury Kurzy-Fido.cz

Masarykova univerzita nabízí uchazečům o studium zdarma stažení všech dosavadních variant TSP i s klíčem správných odpovědí, včetně e-learningového kurzu, na adrese <http://tsp.muni.cz>, kde mohou uchazeči o studium rovněž nalézt odkazy i na další služby poskytované Masarykovou univerzitou - Diskusní fórum pro uchazeče, Interaktivní online TSP, Často kladené dotazy, aj.

## 1. (úloha č. 16, varianta 01, ročník 2012)

V úloze vybíráme vhodná čísla na místa otazníků v číselném obrazci.

**Jaké znalosti a dovednosti jsou zapotřebí k řešení této úlohy?**

- Znalost elementárních početních operací
- Schopnost všimnout si jednoduchých zákonitostí v číselné posloupnosti

**Postup řešení**

Přestože zadání má podobu číselného obrazce, ve skutečnosti hraje „grafika“ jen malou roli. Jde v podstatě jen o to, že v diagramu jsou zapsány postupně dvě číselné posloupnosti.

První z nich má podobu:

1    2    ?    7    11    16    22.

První věc, kterou vždy s číselnou posloupností zkusíme (neroste-li „příliš rychle“), je určení diferencí – rozdílů sousedních členů (tj. kolik musíme k danému členu posloupnosti přičíst, abychom se dostali hodnotou k členu bezprostředně následujícímu). V mnoha případech bývá tato posloupnost již „pravidelná“:

1    +1    2    +2    ?    +2    7    +4    11    +5    16    +6    22

Je zřejmé, že posloupnost diferencí (podbarvená posloupnost) se vždy zvyšuje o jedničku. Na místě otazníku tedy musí být číslo čtyři, neboť  $2 + 2 = 4$ , což „sedí“ i v druhém vztahu  $4 + 3 = 7$ .

Vidíme, že budeme volit mezi odpověďmi **a)** a **d)**.

Druhá posloupnost vypadá následovně:

1    2    ?    24    120.

Diference tentokrát patrně nepřicházejí v úvahu, protože posloupnost roste „relativně rychle“. Vyzkoušejme proto součiny (přesněji řečeno kvocienty):

1    .2    2    .?    ?    .?    24    .5    120.

Posloupnost je relativně krátká, ale vzhledem ke zkušenosti s předchozí částí úlohy nás napadne, že činitelé rostou vždy o jedničku:

1    .2    2    .3    ?    .4    24    .5    120.

Na místě tohoto otazníku tedy musí být číslo 6, neboť  $2 \cdot 3 = 6$ , což vyhovuje i druhé části:  $6 \cdot 4 = 24$ .

**Správná odpověď je tedy d).**

## Řešení úloh z TSP MU – sady S<sub>1</sub>

Tato sada je určen výhradně pro soukromé nekomerční využití.

Sada je šířena jako příloha emailového semináře Reseni-TSP.cz – umístit toto PDF na veřejný webový server je možné pouze se souhlasem autorů (Kurzy-Fido.cz / F solutions, s.r.o.)

Texty úloh jsou duševním vlastnictvím Masarykovy univerzity.

## 2. (úloha č. 17, varianta 01, ročník 2012)

V úloze nejprve určíme, jaké cifry vyhovují podmínkám výpočtu v zadání a následně určíme hodnotu požadovaného součinu.

### Jaké znalosti a dovednosti jsou zapotřebí k řešení této úlohy?

- Znalost postupu písemného násobení

### Postup řešení

Úlohu si převedeme na situaci:

$$\begin{array}{r} X87 \\ .5 \\ \hline \end{array}$$

$$2XY5$$

Postupujeme podle pravidel násobení pod sebou: 7 krát 5 je 35, ve výsledku je sepsána pětka, což je správně, trojku si „pamatujeme“, a postupujeme dále. 8 krát 5 je čtyřicet,  $40 + 3 = 43$ , trojku sepíšeme (tj. víme, kolik je  $Y$ ), a pamatujeme si čtyřku. Vzhledem k tomu, že druhým činitelem v součinu je pětka a výsledek je „dva tisíce a něco“, vidíme, že na místě  $X$  bude čtyřka či pětka. Vzhledem k tomu, že si z předchozího řádu „pamatujeme“ čtyřku, je jasné, že na místě  $X$  musí být číslice čtyři.  $4 \cdot 5 = 20$ ;  $20 + 4 = 24$ , výsledek tedy začíná na 24, čtyřka je na druhém místě výsledku, což je správně. Součin  $X \cdot Y = 12$ .

**Správná odpověď je tedy b).**

## 3. (úloha č. 18, varianta 01, ročník 2012)

V úloze máme určit, která čísla se NEHODÍ na místa otazníků

### Jaké znalosti a dovednosti jsou zapotřebí k řešení této úlohy?

- Schopnost všimnout si jednoduchých vztahů mezi čísly
- Schopnost všimnout si „indicií“, které autor poskytl v grafické podobě úlohy

### Postup řešení

Nejprve si všimneme, jakým způsobem napovídá forma: čísla nalevo od trojúhelníku jsou ve stejných útvarech, sousedí spolu – autor tím pravděpodobně chtěl naznačit, že jistým způsobem patří k sobě. Postupujeme metodou nejmenšího odporu: „patří k sobě – zkusíme je sečíst“. Hned u prvního schématu je vše jasné:  $6 + 4 + 8 = 18$ . Číslo 18 je ovšem také součinem čísel 9 a 2, které s osmnáctkou sousedí.

V úloze hledáme taková čísla, která se nehodí na místa otazníků. Vzhledem k tomu, že v pravém horním trojúhelníku v posledním schématu je dvojka, je jasné, že „výsledek“, tj. číslo v největším trojúhelníku je dvojnásobkem čísla, které se skrývá za nejpravějším otazníkem. Správnou odpovědí tedy musí být hned možnost a), neboť 11 není dvojnásobkem čísla 9. U ostatních doplnění naznačené vztahy (součet čísel ve čtverečích je roven číslu ve velkém trojúhelníku, které je zároveň součinem čísel v pravých trojúhelnících).

**Správná odpověď je tedy a).**

### Řešení úloh z TSP MU – sady S<sub>1</sub>

Tato sada je určen výhradně pro soukromé nekomerční využití.

Sada je šířena jako příloha emailového semináře Reseni-TSP.cz – umístit toto PDF na veřejný webový server je možné pouze se souhlasem autorů (Kurzy-Fido.cz / F solutions, s.r.o.)

Texty úloh jsou duševním vlastnictvím Masarykovy univerzity.

#### 4. (úloha č. 19, varianta 01, ročník 2012)

Tento typ úloh (definování nové operace) patří k nejméně oblíbeným. Ve skutečnosti se jedná o úlohy poměrně jednoduché, v nichž jde prakticky jen o dosazování.

#### Jaké znalosti a dovednosti jsou zapotřebí k řešení této úlohy?

- Znalost pojmu operace
- Znalost úprav výrazů a rovnic.

#### Postup řešení

Na operaci se můžeme dívat jako na předpis, který nám říká, jakým způsobem ze vstupních čísel (argumentů) dospějeme k výsledné hodnotě (do černé skříňky hodím argumenty, vypadne mi výsledek). Jaký je onen předpis (čili jak funguje černá skříňka), je popsáno v definici dané operace.

Jak tedy přečíst a pochopit zápis v zadání:  $a \otimes b = (a + b)/2$ ?

Zápis říká: „použijeme-li operaci  $\otimes$  na argumenty  $a$  a  $b$ , dostaneme jako výsledek  $(a + b)/2$ “.

Jinými slovy, výraz  $a \otimes b$  je zkratkou za výraz  $(a + b)/2$ . A to obecně, pro libovolné hodnoty argumentů  $a$  a  $b$ .

Budeme-li chtít např. zjistit, čemu se rovná  $5 \otimes 7$ , budeme vědět, že je to podle definice totéž, co  $(5 + 7)/2$ , což je 6. V definici jsme zkrátka všude přepsali na místo áčka pětku, na místo béčka sedmičku. Pro lepší pochopení vše demonstrujeme ještě graficky:

$\blacksquare \otimes \blacksquare$  je totéž, co  $(\blacksquare + \blacksquare)/2$

Budeme-li potřebovat zjistit, jaká je hodnota nějakého výrazu, v němž se vyskytuje symbol operace  $\otimes$ , jednoduše na modrá místa vyplníme všude stejné číslo (neznámou, proměnnou, ...), na zelená totéž.

Nyní by nám již nemělo činit problém řešení zmíněné úlohy.

Nejprve budeme zjišťovat, jaká je hodnota  $x$ . To se dozvíme, vyřešíme-li rovnici

$$(8 \otimes x) \otimes x = 11.$$

Jak budeme při řešení postupovat?

Nejprve zjistíme, čemu je rovno  $(8 \otimes x)$ .

To je snadné, vzhledem k naší grafické podobě definice:  $8 \otimes x$  je totéž, co  $(8 + x)/2$ .

Rovnici tedy upravíme do podoby  $((8 + x)/2) \otimes x = 11$ . (Nahradili jsme „stejně stejným“.)

Pro přehlednost doporučujeme, abyste si napsali tuto rovnici na papír s vodorovnou zlomkovou čarou a zbavili se tím vnitřních závorek.

Nyní tedy potřebujeme zjistit, čemu je rovno  $((8 + x)/2) \otimes x$ .

Opět použijeme naši grafickou podobu definice:  $(8 + x)/2 \otimes x$  je totéž, co  $((8 + x)/2 + x)/2$ .

Zase zde doporučíme, abyste si přepsali tuto rovnici do podoby složeného zlomku.

Víme tedy, že  $((8 + x)/2) \otimes x$  je rovno  $((8 + x)/2 + x)/2$ , čili místo rovnice  $(8 \otimes x) \otimes x = 11$  budeme řešit rovnici  $((8 + x)/2 + x)/2 = 11$ , což už je přímočaré, jak uvidíme níže. Tato rovnice totiž obsahuje už jen nám dobře známé operace sčítání a dělení.

Rovnici vynásobíme dvěma, čímž se zbavíme dvojky ve jmenovateli, a dostaneme:

$$(8 + x)/2 + x = 22, \text{ což můžeme dále upravit na tvar } (8 + x)/2 = 22 - x, \text{ a opět vynásobíme dvěma,}$$

#### Řešení úloh z TSP MU – sady S<sub>1</sub>

Tato sada je určen výhradně pro soukromé nekomerční využití.

Sada je šířena jako příloha emailového semináře Reseni-TSP.cz – umístit toto PDF na veřejný webový server je možné pouze se souhlasem autorů (Kurzy-Fido.cz / F solutions, s.r.o.)

Texty úloh jsou duševním vlastnictvím Masarykovy univerzity.

abychom se zbavili druhého jmenovatele, takže nyní máme:

$$8 + x = 44 - 2x. \text{ Nyní jsou úpravy již jednoduché, } x + 2x = 44 - 8.$$

Vidíme tedy, že  $3x = 36$ .

$x$  je tedy rovno 12.

Nyní nám již zbývá jediné, zjistit hodnotu  $2 \otimes x$ , kde  $x$  je rovno 12, čili zjistit hodnotu výrazu  $2 \otimes 12$ . To už je ale jednoduché vzhledem k tomu, co víme.

**2**  $\otimes$  **12** je totiž **(2 + 12)/2** a to je 7.

**Správná odpověď je tedy b).**

## 5. (úloha č. 20, varianta 01, ročník 2012)

V úloze hledáme čísla na místa otazníků, která doplní tabulku tak, aby byl zachován „systém“.

**Jaké znalosti a dovednosti jsou zapotřebí k řešení této úlohy?**

- Schopnost všimnout si „charakteristických“ čísel
- Schopnost všimnout si jednoduchých vztahů mezi čísly
- Pravidla pro práci s mocninami

### Postup řešení

Nejprve si všimneme „charakteristických čísel“ číslo 9 je vlastně 3 na druhou, 25 je 5 na druhou, 8 je dvě na třetí, 64 je čtyři na třetí. To indikuje, že v úloze půjde pravděpodobně o počítání s mocninami.

Je dobré si připomenout pravidla pro počítání s mocninami, které známe ze (základní) školy.

- 1) kterékoliv přirozené číslo na nultou je rovno jedné.
- 2)  $a^{-k} = 1/a^k$ , kde  $a, k$  jsou libovolná přirozená čísla větší než nula, tedy např.  $2^{-1} = 1/2^1 = 0,5$

Poté, co jsme si připomněli tato jednoduchá pravidla, můžeme na tabulku hledět poněkud jinými očima:

?		$0,5 = 2^{-1}$				$8 = 2^3$
	$0,1 = 3^{-2}$		$1 = 3^0$		$9 = 3^2$	
			?	$4 = 4^1$		$64 = 4^3$
$0,008 = 5^{-3}$		$0,2 = 5^{-1}$			$25 = 5^2$	?

Z takto upravené tabulky už je zřejmé, jaké zákonitosti se v ní objevují.

Každý sloupec tabulky přísluší stejné mocnině, shora dolů se základy zvyšují postupně o jedničku, začíná se se základem dva (v námi ukázané části tabulky).

V jednotlivých řádcích jsou postupně vzrůstající mocniny (v naší ukázce od -3 do 3) od stejného základu.

Na místě nejlevějšího otazníku tedy bude číslo  $2^{-3} = 0,125$ , na místě prostředního  $4^0 = 1$  a na místě nejpravějšího  $5^3 = 125$ .

### Řešení úloh z TSP MU – sady S<sub>1</sub>

Tato sada je určen výhradně pro soukromé nekomerční využití.

Sada je šířena jako příloha emailového semináře Reseni-TSP.cz – umístit toto PDF na veřejný webový server je možné pouze se souhlasem autorů (Kurzy-Fido.cz / F solutions, s.r.o.)

Texty úloh jsou duševním vlastnictvím Masarykovy univerzity.

Kompletní tabulka by tedy vypadala takto:

$2^{-3}$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
$3^{-3}$	$3^{-2}$	$3^{-1}$	$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$
$4^{-3}$	$4^{-2}$	$4^{-1}$	$4^0$	$4^1$	$4^2$	$4^3$
$5^{-3}$	$5^{-2}$	$5^{-1}$	$5^0$	$5^1$	$5^2$	$5^3$

**Správná odpověď je tedy e).**

---

### **Řešení úloh z TSP MU – sady S<sub>1</sub>**

Tato sada je určen výhradně pro soukromé nekomerční využití.

Sada je šířena jako příloha emailového semináře Reseni-TSP.cz – umístit toto PDF na veřejný webový server je možné pouze se souhlasem autorů (Kurzy-Fido.cz / F solutions, s.r.o.)

Texty úloh jsou duševním vlastnictvím Masarykovy univerzity.